

Comment calculer des racines cubiques à la main

(Gerard Sookahet – juillet 2024)

Cet article décrit plusieurs techniques pour calculer des racines cubiques à la main. Cela peut sembler étrange, mais qui sait cela peut être utile un jour ou l'autre.

- A. Méthode itérative de Newton-Raphson
- B. Les Fractions Continues
- C. Méthodes de type compte-gouttes
- D. Bibliographie

A. Méthode itérative de Newton-Raphson

L'idée consiste à appliquer l'algorithme de Newton [1] :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

avec :

$$f(x) = x^3 - A$$

A étant le nombre dont on cherche la racine cubique.

Avec $f(x)$ notre formule devient:

$$x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{A}{x_n^2} \right)$$

Sa convergence est quadratique. Autrement dit, le nombre de décimales exactes est doublé à chaque itération.

Pour initier l'algorithme, le choix de x_0 est primordial afin d'obtenir des valeurs précises le plus rapidement possible. Pour un calcul à la main, un compromis honorable est de prendre pour x_0 le cube parfait le plus proche de A .

Exemple: Soit $A=31$

Nous avons:

$$x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{31}{x_n^2} \right)$$

Prenons $x_0=3$ car $3^3=27$ est proche de 31.

$$x_1 = \frac{1}{3} \left(6 + \frac{31}{9} \right) = \frac{85}{27}$$
$$x_2 = \frac{1}{3} \left\{ \frac{170}{27} + \frac{\frac{31}{729}}{\frac{72250}{729}} \right\} = \frac{1838423}{585225}$$

Ce qui nous fait:

$$x_1 = 3.\underline{14}81484$$
$$x_2 = 3.\underline{1413}952$$

x_2 donne un résultat à 4 décimales près.

N'allons pas plus loin car le calcul devient vite inextricable à la main.

Pour finir, il est bon de savoir que cet algorithme se généralise très bien pour calculer

la racine $k^{\text{ième}}$ de A :

$$x_{n+1} = \frac{1}{k} \left((k-1)x_n + \frac{A}{x_n^{k-1}} \right)$$

B. Les Fractions Continues.

La fraction continue est un outil mathématique remarquable, très pratique, et souvent sous-estimé en calcul [2].

Exemple: Nous voulons calculer $\sqrt[3]{31}$

Pour cela, cherchons l'entier maximal contenu dans $\sqrt[3]{31}$. Il s'agit donc de la racine cubique du cube parfait le plus proche. Autrement dit c'est la racine cubique de 27 soit 3. Comme 27 est inférieur à 31, nous écrivons:

$$\sqrt[3]{31} = \sqrt[3]{3^3 + 4} = 3 + x$$

Ensuite :

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{3^3 + 4} &= 3 + x \\ 3^3 + 4 &= (3 + x)^3 \\ 27 + 4 &= 27 + 27x + 9x^2 + x^3\end{aligned}$$

En réarrangeant les termes de l'égalité :

$$4 = x(x^2 + 9x + 27)$$

D'où :

$$x = \frac{4}{x^2 + 9x + 27}$$

L'idée étant d'utiliser cette dernière formule de manière itérative pour calculer une valeur approchée de x en écrivant :

$$x_1 = \frac{4}{x_0^2 + 9x_0 + 27}$$

En faisant l'hypothèse que x_0 est très petit, nous obtenons en 1^{ère} approximation :

$$x_1 = \frac{4}{27}$$

D'où :

$$\sqrt[3]{31} \simeq 3 + \frac{4}{27} = 3.1481481$$

Calculons x_2 à partir de :

$$x_2 = \frac{4}{x_1^2 + 9x_1 + 27}$$

En substituant x_1 :

$$x_2 = \frac{4}{\left(\frac{4}{27}\right)^2 + 9\left(\frac{4}{27}\right) + 27}$$

Soit encore :

$$x_2 = \frac{2916}{20671}$$

D'où :

$$\sqrt[3]{31} \approx 3 + \frac{2916}{20671} = 3.1410672$$

x_2 donne un résultat à 3 décimales près. Ce qui est pas mal.

Le calcul de x_3 apporterait 1 décimale de plus :

$$x_3 = \frac{1709160964}{12087829287}$$

Et :

$$\sqrt[3]{31} \approx 3 + \frac{1709160964}{12087829287} = 3.14139519$$

La précision est assez variable mais en moyenne on gagne 1 décimale par itération en sachant que cela peut être plus si la différence entre le nombre dont on cherche la racine cubique et le cube parfait le plus proche est proche de 1.

C. Méthodes de type compte-gouttes

1. Soustraction de nombres impairs

Voici une méthode très originale qui consiste à soustraire des nombres impairs issus d'une fonction et de compter les opérations effectuées.

Formons la fonction à valeurs entières :

$$f(n) = (n+1)^3 - n^3 \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

Qui devient, après développement et réduction un polynôme de degré 2 :

$$f(n) = 3n^2 + 3n + 1$$

Exemple: On cherche la racine cubique de **75957**

Ecrivons: **75999,000**

Groupons trois par trois les chiffres en partant de la virgule:

75 999,000

Prenons la première tranche de trois chiffres en partant de la gauche: **075** .

Soustrayons à ce nombre toutes les valeurs de $f(n)$ consécutives possibles en partant de $n=0$.

75 - 1 - 7 - 19 - 37 = 11

Le dernier résultat est **11**. Nous ne continuons pas car **11-61** est négatif.

Pour obtenir le premier chiffre, il suffit de compter le nombre de soustractions réalisées: **4** (c'est notre chiffre des dizaines).

Prenons le dernier résultat (**11**). Accolons lui la deuxième tranche de trois chiffres (**999**), ce qui nous fait **11999**.

Prenons le nombre de soustractions effectuées (**4**). Accolons lui **0**, ce qui nous fait **40**.

Maintenant, soustrayons toutes les valeurs de $f(n)$ en partant de $n=40$:

$$11999 - 4921 - 5167 = 1869$$

Cela nous fait 2 opérations donc le chiffre des unités sera **2**. Voilà déjà un résultat partiel: **42**.

Accolons une tranche de zéros (**000**) à **1869**, ce qui donne **1869000**.

Accolons le 1^{er} nombre de soustraction (**4**) au 2nd nombre de soustraction (**2**) suivi d'un **0**. D'où **420**.

Maintenant, soustrayons toutes les valeurs de $f(n)$ en partant de $n=420$:

$$1869000 - 530461 - 532987 - 535519 = 270033$$

Cela fait 3 opérations, d'où le résultat: **42,3**

Continuons en formant $n=4230$ et en soustrayant $f(n)$:

$$270033000 - 53691391 - 53716777 - 53742169 - 53767567 - 53792971 = 1322125$$

Cela fait 5 opérations, d'où le résultat: **42,35**

Continuons en formant $n=42350$ et en soustrayant $f(n)$:

$$1322125000 - 5380694551 < 0$$

La soustraction risque de donner un résultat négatif. Nous ne la faisons pas. Cela fait donc **0** opération.

D'où: **42,350**

En sachant que le dernier résultat de la soustraction demeure **1322125000**, continuons en formant $n=423500$ et en soustrayant $f(n)$:

$$1322125000000 - 538058020501 - 538060561507 = 246006417992$$

Cela fait 2 opérations, d'où: **42,3502**

etc

Nous pourrions continuer comme cela *ad infinitum* en ajoutant des tranches de 000 après la virgule à notre nombre initial.

Un résultat convenable sera donc:

$$\sqrt[3]{75957} \approx 42.3502$$

Vous avez sans nul doute remarqué que cette méthode est assez différente des deux précédentes. L'un de ses grands avantages, en dehors de sa simplicité, est qu'il ne s'agit pas d'un processus itératif et convergent. Par conséquent, chaque décimale calculée est exacte.

2. Formalisation

Formalisons ce que nous venons de voir [3][4].

Si l'on note A le nombre dont on cherche la racine cubique et que l'on forme le quintuplet (A,0,0,0,1), on peut calculer une suite de quintuplets selon les règles suivantes:

R1 : Pour le quintuplet (X,Y,Z,T,U), si $X \geq U$, le prochain quintuplet sera (X - U, Y + 1, Z + 1, T + 6, U + T + 6)

R2 : Pour le quintuplet (X,Y,Z,T,U), si $X < U$, le prochain quintuplet sera (1000X, 0, 10Z, 10T, 100U - 270Z - 99)

Pour le calcul, $100U - 270Z - 99$ peut s'écrire $100U - 300Z + 30Z - 100 + 1$.

Le nombre de fois où l'on applique la règle **R1** entre les règles **R2** donne les chiffres de la racine cubique.

Exemple : On cherche la racine cubique de **76**

On forme le quintuplet (76,0,0,0,1) et on applique les règles R1 et R2 :

(76,0,0,0,1) R1 (75,1,1,6,7) R1 (68,2,2,12,19) R1 (49,3,3,18,37) R1 (12,3,3,24,61)

R2 (12000,0,30,30,5191) R1 (6809,1,31,36,5227) R1 (1582,2,32,42,5269)

R2 (1582000,0,320,420,518161) R1 (1063839,1,321,426,518587) R1 (545252,2,322,432,519019)

R1 (26233,3,323,438,519457) **R2**

Le nombre de fois où l'on a appliqué R1 successivement est 4 2 3.

Donc :

$$\sqrt{76} \simeq 4.23$$

3. Pour aller plus loin

La technique de soustraction de nombres impairs permettrait théoriquement de calculer une racine $k^{\text{ième}}$ en créant une fonction à valeurs entières :

$$f(n) = (n+1)^k - n^k \text{ avec } (n, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

Essayons avec $k=5$ en sachant qu'au delà cela devient vite compliqué.

$$f(n) = (n+1)^5 - n^5 \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

Qui devient, après développement et réduction un polynôme de degré 4 :

$$f(n) = 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1$$

Exemple: On cherche la racine 5^{ième} de **1179**

Ecrivons: **1179,00000**

Groupons cinq par cinq les chiffres en partant de la virgule:

1179,00000

Prenons la première tranche de cinq chiffres en partant de la gauche: **01179** .

Soustrayons à ce nombre toutes les valeurs de $f(n)$ consécutives possibles en partant de $n=0$.

1179 - 1 - 31 - 211 - 781 = 155

Le nombre de soustractions réalisées: **4** (c'est notre chiffre des unités).

Prenons le dernier résultat (**155**). Accolons lui une tranche de cinq chiffres (**00000**), ce qui nous fait **15500000**.

Maintenant, soustrayons toutes les valeurs de $f(n)$ en partant de $n=40$:

15500000 - 13456201 = 2043799

Le nombre de soustractions réalisées: **1** (c'est notre 1^{er} chiffre après la virgule).

D'où le résultat partiel : **4.1**

Prenons le dernier résultat (**2043799**). Accolons lui une tranche de cinq chiffres (**00000**), ce qui nous fait **204379900000**.

Maintenant, soustrayons toutes les valeurs de $f(n)$ en partant de $n=410$:

204379900000 - 141978943051 = 62400956949

Le nombre de soustractions réalisées: **1** (c'est notre 2nd chiffre après la virgule).

Finalement :

$$\sqrt[5]{1179} \simeq 4.11$$

Voilà, c'est tout pour cette fois.

D. Bibliographie.

- [1] https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode_de_Newton
- [2] Manny Sardina, *General Method for Extracting Roots using (Folded) Continued Fractions*, 2007
- [3] Frazer Jarvis, *Square roots by subtraction*. Mathematical Spectrum, 37, pp119-122, 2005.
- [4] Mayer Goldberg, *A Spigot-Algorithm for Square-Roots: Explained and Extended*, <https://arxiv.org/abs/2312.15338>, 2023.