

Deux petits problèmes d'intersections dans le plan.

Gérard Sookahet v1.0 Février 2001.

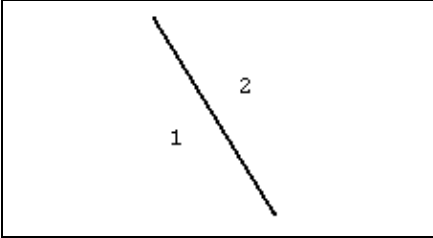
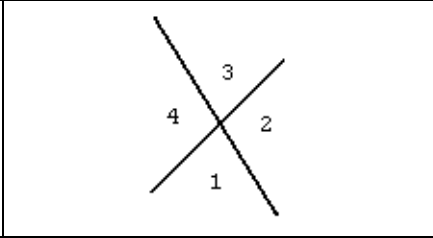
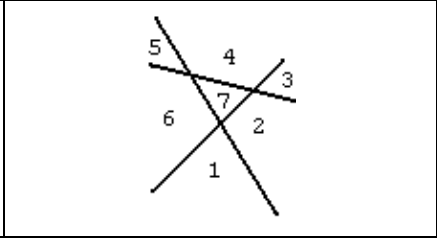
Bonjour Nobles Lecteurs

Voici deux petits résultats dignes d'intérêt sur les intersections dans le plan.

I) Avec des droites.

Si l'on a n droites dans le plan de telle sorte qu'il n'y ait pas deux droites parallèles et trois droites concourantes, alors le nombre de régions est $n(n+1)/2 + 1$.

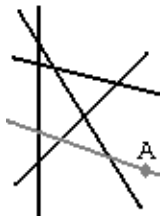
Définissons $C(n)$ le cas avec n droites.
 $C(0)$ est vérifié: $C(0) = 0(0+1)/2 + 1 = 1$.
Vérifions visuellement les cas $C(1)$, $C(2)$ et $C(3)$.

C(1)	C(2)	C(3)
		

Montrons par récurrence que $C(n) \Rightarrow C(n+1)$.
Pour un $C(n)$ donné avec $n > 3$, il y a plusieurs configurations possibles de n droites.
Cependant, nous allons utiliser ces deux résultats :

- Chaque configuration $C(n+1)$ de $(n+1)$ droites peut se construire en ajoutant une droite à partir d'un configuration $C(n)$ de n droites.
- Inversement, une configuration $C(n)$ de n droites peu se construire en otant une droite d'une configuration $C(n+1)$ de $(n+1)$ droites.

Otons une droite D d'une configuration $C(n+1)$ quelconque. Etant donné qu'il n'y pas de droites parallèles, la droite D coupe n droites exactement. Etant donné qu'il n'y a pas trois droites concourantes, aucune intersection de D ne coupe plus d'une droite en un point donné. Le fait de retirer D , enlève n intersections de notre configuration $C(n+1)$.
Il reste à trouver le nombre de régions qui se joignent quand on ote D . Pour cela, faisons un raisonnement sur un dessin:



La portion de droite qui contient A délimite deux régions qui se joindront quand on ote D . En considérant le segment $[A,A1]$, on se rend compte qu'en enlevant ce dernier, se joignent deux régions. De même pour

[A1,A2], etc

Si il y a n intersections, en otant D , on fait se joindre $(n+1)$ régions. Dans un cas général, le nombre de régions se calcule en prenant le nombre de régions existantes avant d'oter D auquel on soustrait $(n+1)$.

Par hypothèse, la configuration après avoir oter D est $C(n) = n(n+1)/2 + 1$.

La configuration $C(n+1)$ avant d'oter D est: $n(n+1)/2 + 1 + (n+1) = 1 + (n+1)(n+2)/2$.

De fait nous avons bien $C(n) \Rightarrow C(n+1)$.

II) Avec des cercles.

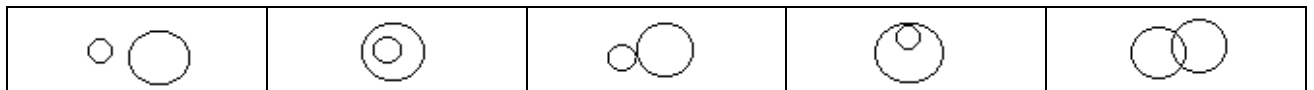
Si l'on a n cercles dans le plan, alors le nombre maximum d'intersections est $n(n-1)$.

Définissons $C(n)$ le cas avec n cercles.

Le cas $C(1)$ est trivial, il correspond aucune intersection: $C(1) = 1(1-1) = 0$.

Qu'en est-il pour $C(2)$?

Il y a 5 cas de figures:



Le nombre d'intersections possibles est 0, 1 ou 2.

Donc pour $C(2)$ le maximum d'intersections est 2.

Dans un cas plus général, supposons qu'il n'y ait pas trois cercles avec un même point d'intersection. Ce qui tend à maximiser, avec la configuration $C(n)$, le nombre d'intersections de chaque cercle.

Pour se fixer les idées, il suffit de dessiner un cercle de rayon $1-\epsilon$. Ensuite on équirépartit m points sur le cercle. Si l'on efface le cercle, on se rend compte qu'il y a toujours un cercle de rayon 1 autour de chacun des m points. Donc chaque cercle coupe les $(m-1)$ autres en deux points et par chaque point il ne passe pas plus que deux cercles.

Utilisons la même idée que dans la démonstration précédente. Une configuration $C(n)$ est obtenue en otant un cercle d'une configuration $C(n+1)$. Le cercle que l'on enlève, coupe les autres cercles au plus deux fois.

Autrement dit on ote $2n$ intersections.

Pour avoir le nombre d'intersections total, on ajoute $2n$ à $C(n)$. Ce qui nous fait:

$$C(n) + 2n = n(n-1) + 2n = n^2 - n + 2n = n^2 + n = (n+1)n$$

De fait nous avons bien $C(n) \Rightarrow C(n+1)$

Voilà c'est tout pour cette fois.

[Gérard Sookahet](#) v1.0 Février 2001.