

Bonjour Nobles Lecteurs

Leonhard Euler(1707–1783) est de loin le plus grand mathématicien que la Suisse ait vu naître. Son brillant esprit, la richesse et la variété de ses travaux ont dominé les Mathématiques du XVIIIème siècle. Ses contributions vont de l'Analyse à l'Arithmétique en passant par la Géométrie.

Ici, c'est de cette dernière discipline dont il est question. Plus précisément, il s'agit d'un fameux théorème de géométrie dans l'espace.

I) Enoncé du théorème.

Soit un polyèdre convexe.

Si l'on note:

- S le nombre de sommets.
- F le nombre de faces.
- A le nombre d'arêtes.

Alors:

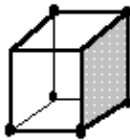
$S + F = A + 2$

Hâtons-nous de vérifier:

- Pour un tétraèdre $S=4$, $F=4$ et $A=6$
 $S+F=8$ et $A+2=8$.



- Pour un cube $S=8$, $F=6$ et $A=12$
 $S+F=14$ et $A+2=14$.



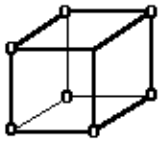
- etc

II) Démonstration

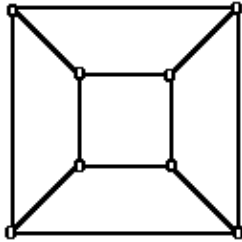
Il existe au moins 15 démonstrations de ce théorème faisant appel à diverses disciplines: théorie des graphes, topologie, géométrie dans l'espace et même de la physique(sic!).

La démonstration qui va suivre est celle du type que l'on attribut historiquement à Louis Augustin Cauchy(1789–1857)([1]).

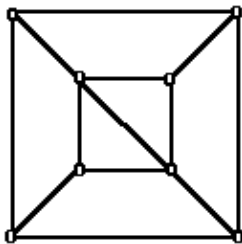
Pour se fixer les idées prenons un polyèdre "sympathique": un cube.



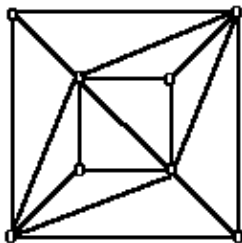
Applatissons-le afin de pouvoir le représenter dans un plan. Cela se fait en étirant les arêtes du cube.



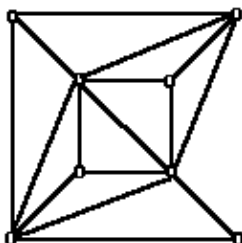
On obtient le graphe planaire du cube. Notons qu'une des faces est partie. Donc $S+F=A+1$.
Maintenant, ajoutons une arête à cette figure.



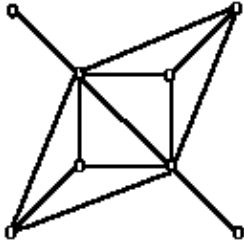
Le nombre d'arêtes est augmenté de 1 ainsi que le nombre de faces. Par conséquent, $S+F=A+1$ ne change pas. Sachant que l'on peut décomposer n'importe quel polygone en un nombre fini de triangles (cf. technique de triangulation de Delaunay), il apparaît par exemple la figure suivante:



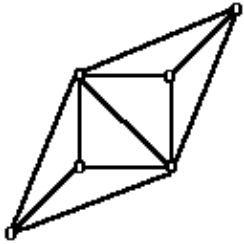
$S=F=A+1$ ne change toujours pas.
Cette fois, enlevons une arête extérieure à cette figure.



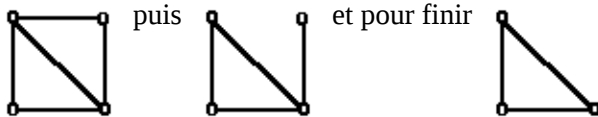
Cela réduit de 1 le nombre d'arêtes et aussi de 1 le nombre de faces. Encore une fois $S+F=A+1$ reste inchangé. Dans ce cas, faisons de même pour les trois autres arêtes extérieures.



Maintenant, attaquons nous aux arêtes qui dépassent. Quand on enlève une de ces arêtes, on ôte aussi un sommet. $S+F=A+1$ reste inchangé. Cela reste vrai pour l'autre arête qui dépasse. En fin de compte nous avons:



Recommençons le même processus en retirant les arêtes extérieures, puis celles qui dépassent. Cela nous amène à:



Il nous reste donc un triangle avec 3 sommets($S=3$), 1 face($F=1$) et 3 arêtes($A=3$).
Donc $S+F=A+1$ devient $3+1=3+1$ soit $4=4$. De par le principe d'induction, $S+F=A+1$ est vérifié. Par conséquent, $S+F=A+2$ est vrai.
Quid Est Demonstratum.

Voilà c'est tout pour cette fois.

Bibliographie

- [1] Cauchy, Collection un Savant Une Epoque, Edition Belin.

[Gérard Sookahet](#) v1.1 Juin 2001.